R.3 後期中間試験　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

※途中式や論述がないものは減点します。

10 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3=1$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9\cdot4-6\cdot3+3$

$=36-18+3$

$=21$

3

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから。

$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$

5　$\sqrt{21}$

11 3点A(0, −1), B(2, 5), C(−1, 1)を頂点とする△ABCの面積 S を求めよ。

$\vec{AB}=(2,6)$

$\vec{AC}=(-1,2)$

2つのベクトルのなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{-2+12}{\sqrt{4+36}\sqrt{1+4}}=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta>0$ であるから。

$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $S=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$

別

$S=\frac{1}{2}|2\cdot2-6\cdot(-1)|$

$=\frac{1}{2}|4+6|$

$=\frac{10}{2}$

$=5$

5　5

12 2点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(1) 線分ABを4：3に内分する点

$\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3}$

3　$\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$

(2) 線分BCを2：5に外分する点

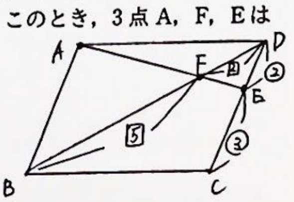
$\dfrac{-5\vec{b}+2\vec{c}}{2-5}=\dfrac{-5\vec{b}+2\vec{c}}{-3}$

3　$\dfrac{5\vec{b}-2\vec{c}}{3}$

(3) 3点を頂点とする△ABCの重心

3　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

13 平行四辺形ABCDにおいて，辺CDを3：2に内分する点をE，対角線BDを5：2に内分する点をFとする。このとき，3点A，F，Eは一直線上にあることを証明せよ。



$\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ とすると，

$\vec{AF}=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5+2}=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{7}$

$\vec{AE}=\dfrac{2\vec{AC}+3\vec{d}}{3+2}=\dfrac{2(\vec{b}+\vec{d})+3\vec{d}}{5}=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5}$　2

よって $\vec{AF}=\frac{5}{7}\vec{AE}$

したがって 3点A，F，Eは一直線上にある //

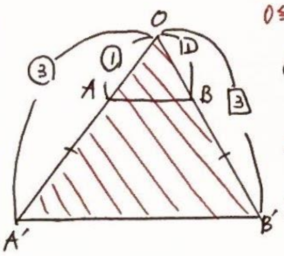
5

14 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。(図と答えのみでよい)

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$, $0\leqq s+t\leqq3$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

$0\leqq\frac{s}{3}+\frac{t}{3}\leqq1$

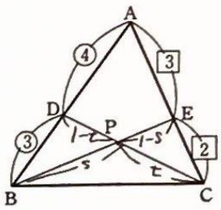
5



$\vec{OP}=\frac{s}{3}(3\vec{OA})+\frac{t}{3}(3\vec{OB})$

$3\vec{OA}=\vec{OA'}$, $3\vec{OB}=\vec{OB'}$ となる点A',B'をとるときの△OA'B'の周および内部

15 △ABCにおいて，辺ABを4：3に内分する点をD，辺ACを3：2に内分する点をEとし，2つの線分CD，BEの交点をPとする。$\vec{AB}=\vec{b}$，$\vec{AC}=\vec{c}$ とするとき $\vec{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。ただし，メネラウスの定理を用いて解くことは不可とする。



BP：PE＝s：1−s とすると，

$\vec{AP}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}$ …①

CP：PD＝t：1−t とすると，

$\vec{AP}=\frac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$ …②　2

$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから，

$\vec{AP}$ は $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてただ1通りに表される。

よって，

$\begin{cases}1-s=\frac{4}{7}t & \cdots③\\ \frac{3}{5}s=1-t & \cdots④\end{cases}$

③より $s=1-\frac{4}{7}t$

④に代入して，

$\frac{3}{5}(1-\frac{4}{7}t)=1-t$

$3(1-\frac{4}{7}t)=5-5t$

$3-\frac{12}{7}t=5-5t$

$21-12t=35-35t$

$23t=14$

$t=\dfrac{14}{23}$

よって②より

$\vec{AP}=\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{23}\vec{b}+\left(1-\frac{14}{23}\right)\vec{c}$

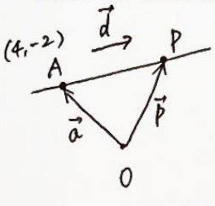
$=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

5

$\vec{AP}=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

16 次の問に答えよ。

(1) 点A(4, −2)を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ -1)$ に平行な直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。



直線上の点を点P($\vec{p}$)とすると，

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

$=(4,-2)+t(2,-1)$

$=(4+2t,\ -2-t)$

$x=4+2t$

$+)\ 2y=-4-2t$

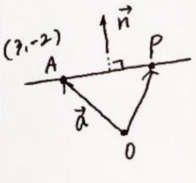
$x+2y=0$

3　3

媒介変数表示 $x=4+2t$, $y=-2-t$,　$x+2y=0$

(2) 点A(3, −2)を通り，ベクトル $\vec{n}=(4,\ 5)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

直線上の点を点P(x, y)とすると，



$\vec{AP}\cdot\vec{n}=0$

$(x-3,\ y+2)\cdot(4,5)=0$

$4(x-3)+5(y+2)=0$

$4x+5y-2=0$

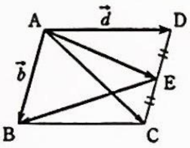
3

$4x+5y-2=0$

R.3 後期中間試験　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

※途中式や論述がないものは減点します。

1 平行四辺形 ABCD において，辺 CD の中点を E とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。



(1) $\overrightarrow{AC}$

3　$\vec{b}+\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{AE}$

3　$\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{EB}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$=\vec{b}-(\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{b})$

3　$\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}$

2 $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=6\vec{b}-4\vec{a}$ であるとき，$\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{AB}$ であることを示せ。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないものとする。

・$\overrightarrow{OP}=6\vec{b}-4\vec{a}$

$=2(3\vec{b}-2\vec{a})$

・$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=3\vec{b}-2\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AB}$

$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない

よって　$\overrightarrow{OP}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$

したがって　$\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{AB}$　//

5

3 $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，$\vec{c}=(-6,\ 5)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s, t は実数）とすると，

$\vec{c}=s(2,-1)+t(3,-2)$

$=(2s+3t,\ -s-2t)=(-6,5)$

$\begin{cases}2s+3t=-6 \cdots ① \\ -s-2t=5 \cdots ②\end{cases}$

①+②×2

$2s+3t=-6$

$-2s-4t=10$

$-t=4$

$t=-4$

②より

$s=-2\cdot(-4)-5$

$=3$

よって $\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}$

5

$\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}$

4 原点を O とし，A$(-2,\ 3)$，B$(-4,\ -1)$，C$(4,\ 2)$ とする。

(1) $\overrightarrow{AB}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(-4+2,\ -1-3)$

$=(-2,-4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$

2　$\overrightarrow{AB}=(-2,-4)$　2　$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形のとき，D の座標をベクトルを用いて求めよ。

四角形 ABCD が平行四辺形より

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

点 D(x,y) とすると，

$(-2,-4)=(4-x,\ 2-y)$

$4-x=-2$　　$2-y=-4$

$x=6$　　$y=6$

したがって点 D の座標は $(6,6)$

5

D$(6,6)$

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，t は実数とする。

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9,3)+t(-1,-2)=(9-t,\ 3-2t)$

$|\vec{c}|=\sqrt{(9-t)^2+(3-2t)^2}$

$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2$

$=5t^2-30t+90$

$=5(t^2-6t)+90$

$=5\{(t-3)^2-9\}+90$

$=5(t-3)^2+45$

よって $|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45

3

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから

$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小

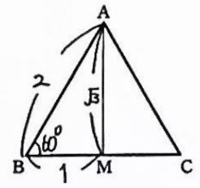
よって $|\vec{c}|$ は $t=3$ で

最小値 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

5

最小値 $3\sqrt{5}$　($t=$ 3)

6 1 辺の長さが 2 である正三角形 ABC の辺 BC の中点を M とするとき，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

$=2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ$

$=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

3　3

(2) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 90^\circ$

3　0

(3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}$

$=2\cdot 1\cdot\cos 120^\circ$

$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

3　-1

7 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-5,\ 1)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と，そのなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-5)+2\cdot 1=-15+2=-13$

$\cos\theta=\dfrac{-13}{\sqrt{9+4}\sqrt{25+1}}=\dfrac{-13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\dfrac{-13}{13\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\theta=135^\circ$

3　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-13$　3　$\theta=135^\circ$

8 $\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ が次のようになるとき，定数 x の値を求めよ。

(1) 垂直

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2-3x=0$

$3x=2$

$x=\frac{2}{3}$

2　$x=\frac{2}{3}$

(2) 平行

$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在

$(2,x)=k(1,-3)$

$(2,x)=(k,-3k)$

よって，$2=k$，$x=-3k$

2　$x=-6$

9 $\vec{a}=(1,\ -2)$ とのなす角が 45° で，大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,y)$ とすると，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x-2y$

$\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{10}\cos 45^\circ=x-2y$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x-2y$

$x-2y=5\cdots①$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$

$x^2+y^2=10\cdots②$

2

①を②に代入すると，

$(2y+5)^2+y^2=10$

$4y^2+20y+25+y^2-10=0$

$5y^2+20y+15=0$

$y^2+4y+3=0$

$(y+1)(y+3)=0$

$y=-1,-3$

・$y=-1$ のとき $x=-2+5=3$

・$y=-3$ のとき $x=-6+5=-1$

よって　$\vec{b}=(-1,-3)$，$(3,-1)$

5

$\vec{b}=(-1,-3)$，$(3,-1)$