R.3 後期中間試験

※途中式や論述がないものは減点します。

( )組( )番 名前( )

1 次の式を計算せよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(1) $a^6 a^{-2}$

$= a^{6-2}$

$= a^4$

2 $a^4$

(2) $a^{-4} \div a^{-1}$

$= a^{-4-(-1)}$

$= a^{-3}$

2 $\frac{1}{a^3}$

(3) $5^5 \times (5^{-1})^2 \div 5$

$= 5^{5-2-1}$

$= 5^2$

2 $25$

(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$

2 $\frac{1}{3}$

(5) $2^{\frac{5}{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \div 2^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{0}{6}}$

$= 2^0$

2 $1$

(6) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

$= \sqrt[3]{8}$

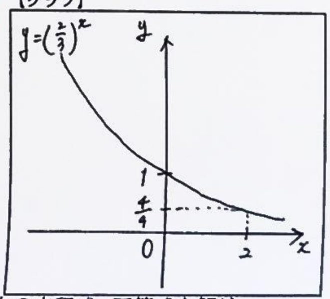
$= \sqrt[3]{2^3}$

2 $2$

2 関数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。また，$0 \leqq x \leqq 2$ のときの値域を求めよ。

右下がり

2 【グラフ】




$x=2$ のとき

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

2 値域 $\frac{4}{9} \leqq y \leqq 1$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{x-2} = \sqrt{2}$

$2^{2(x-2)} = 2^{\frac{1}{2}}$

$2(x-2) = \frac{1}{2}$

$x-2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{9}{4}$

2 $x = \frac{9}{4}$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \frac{1}{243}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$0 < \frac{1}{3} < 1$ より　$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

2 $x < \frac{5}{2}$

(3) $5^{x-2} \leqq 125$

$5^{x-2} \leqq 5^3$

5は1より大きいので

$x-2 \leqq 3$

$x \leqq 5$

2 $x \leqq 5$

(4) $9^x - 3^{x+1} - 54 > 0$

$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 54 > 0$

$3^x = A$ とおくと，

$A^2 - 3A - 54 > 0$

$(A+6)(A-9) > 0$

$A > 0$ より　$9 < A$

$9 < 3^x$　よって，

$3^2 < 3^x$

2 $2 < x$

4 関数 $y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの $x$ の値を求めよ。

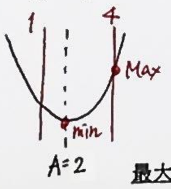
4

$y = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1$

$2^x = A$ とおくと，

$y = A^2 - 4A + 1$

$= (A-2)^2 - 3$




$0 \leqq x \leqq 2$ より

$1 \leqq 2^x \leqq 4$

$1 \leqq A \leqq 4$

・$A=4$ のとき

Max $(4-2)^2 - 3 = 1$

・$A=2$ のとき

min $-3$

・$A=4$

$2^x = 4$

$x = 2$

・$A=2$

$2^x = 2$

$x = 1$

最大値 $1$ ($x=2$)，最小値 $-3$ ($x=1$)

5 次の値を求めよ。

(1) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

2 $-3$

(2) $\log_3 1$

2 $0$

(3) $\log_7 \sqrt[5]{7}$

$= \log_7 7^{\frac{1}{5}}$

2 $\frac{1}{5}$

(4) $\log_{\sqrt{5}} 25$

$= \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^4$

2 $4$

6 次の式を計算せよ。

(1) $\log_8 2 + \log_8 32$

$= \log_8 (2 \times 32)$

$= \log_8 64$

$= \log_8 8^2$

3 $2$

(2) $4\log_2 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \log_2 \sqrt{2}^4 - \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \log_2 \left(4 \div \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \log_2 2$

3 $1$

(3) $\log_3 5 \cdot \log_5 27$

$= \log_3 5 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 5}$

$= \log_3 27$

$= \log_3 3^3$

3 $3$

(4) $3^{\log_3 7}$

$y = 3^{\log_3 7}$

$\log_3 y = \log_3 3^{\log_3 7}$

$\log_3 y = \log_3 7$

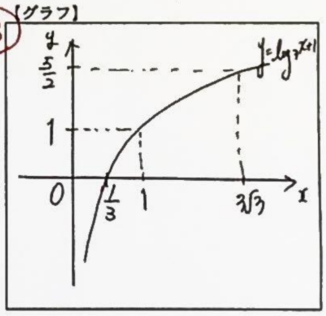
$y = 7$

3 $7$

7 関数 $y = \log_3 x + 1$ のグラフをかけ。また，$1 \leqq x \leqq 3\sqrt{3}$ のときの値域を求めよ。

右上がり

3 【グラフ】




・$x=1$ のとき $y = \log_3 1 + 1 = 1$

・$y=0$ のとき　$0 = \log_3 x + 1$

$\log_3 x = -1$

$x = 3^{-1}$

$x = \frac{1}{3}$

・$x = 3\sqrt{3}$ のとき

$y = \log_3 3^{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

値域 3 $1 \leqq y \leqq \frac{5}{2}$

8 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_3 x = 2$

$\log_3 x = \log_3 3^2$

$x = 3^2$

$x = 9$

2 $x = 9$

(2) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

$x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

2 $x = 16$

(3) $\log_6(x+1) + \log_6(x+2) \leqq 1$

$x+1 > 0$ かつ $x+2 > 0$　(真数条件)

$x > -1$，$x > -2$

すなわち，$x > -1$

$\log_6 (x+1)(x+2) \leqq \log_6 6$

底6は1より大きいので

$(x+1)(x+2) \leqq 6$

$x^2 + 3x - 4 \leqq 0$

$(x+4)(x-1) \leqq 0$

$-4 \leqq x \leqq 1$

$x > -1$ より

$-1 < x \leqq 1$

3 $-1 < x \leqq 1$

R.3 後期中間試験　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

※途中式や論述がないものは減点します。

9 関数 $y=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$ $(1\leqq x\leqq 32)$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの $x$ の値を求めよ。

4

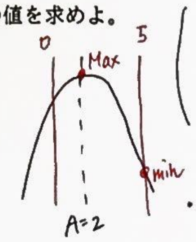
$\log_2 x = A$ とおくと，

$y=-A^2+4A$

$=-(A^2-4A)$

$=-\{(A-2)^2-4\}$

$=-(A-2)^2+4$




○ $A=2$ のとき Max 4

○ $A=5$ のとき min $-25+20=-5$

• $A=2$　$\log_2 x=2$　$x=4$

• $A=5$　$\log_2 x=5$　$x=32$

また，

$1\leqq x\leqq 32$

$0\leqq \log_2 x\leqq 5$

$0\leqq A\leqq 5$

最大値 4 $(x=$ 4 $)$，最小値 $-5$ $(x=$ 32 $)$

10 $6^{10}$ は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

4

$\log_{10} 6^{10} = 10\log_{10}6 = 10\log(2\times 3)$

$=10(\log_{10}2+\log_{10}3) = 10(0.3010+0.4771)$

$=10\times 0.7781 = 7.781$

$7<\log_{10}6^{10}<8$

$\log_{10}10^7<\log_{10}6^{10}<\log_{10}10^8$

$10^7<6^{10}<10^8$

8ケタ

11 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=x^2+2x$ の導関数を求めよ。

4

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)\}-(x^2+2x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2+\cancel{2x}+2h-\cancel{x^2}-\cancel{2x}}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+2)$

$=2x+2$

12 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-\frac{x^2}{2}+2x+2$

2　$y'=-x+2$

(2) $y=(x^2+1)(x+2)$

$y=x^3+2x^2+x+2$

2　$y'=3x^2+4x+1$

13 条件 $f'(0)=2$，$f'(1)=4$，$f(2)=6$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

4

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，

$f'(x)=2ax+b$

• $f'(0)=b=2$

• $f'(1)=2a+b=4$

$2a+2=4$

$2a=2$

$a=1$

○ $f(2)=4a+2b+c=6$

$4+4+c=6$

$c=-2$

よって $f(x)=x^2+2x-2$

$f(x)=x^2+2x-2$

14 関数 $y=x^3-3x$ のグラフ上の点 $(2,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

4

$y'=3x^2-3$

接線の方程式の傾きは $3\cdot 2^2-3=9$

よって $y=9(x-2)+2$

$=9x-16$

$y=9x-16$

15 関数 $y=-x^3+3x^2+9x-7$ について，次の問に答えよ。

6

(1) 極値とそのときの $x$ の値を求めよ。また，増減表とグラフをかけ。

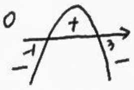
$y'=-3x^2+6x+9$

$y'=0$ とすると，

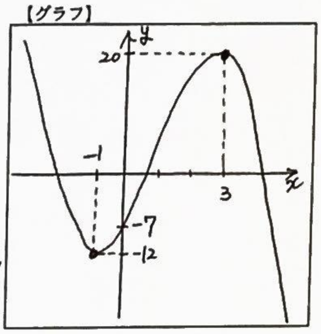
$-3(x^2-2x-3)=0$

$-3(x-3)(x+1)=0$

$x=3,-1$




【グラフ】




• $x=-1$ のとき

$y=-(-1)^3+3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)-7$

$=1+3-9-7$

$=-12$

• $x=3$ のとき

$y=-3^3+3\cdot 3^2+9\cdot 3-7$

$=20$

【増減表】

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-12$ | ↗ | $20$ | ↘ |

極大値 20 $(x=$ 3 $)$，極小値 $-12$ $(x=$ $-1$ $)$

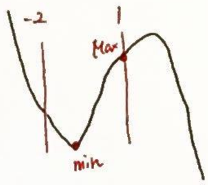
(2) $-2\leqq x\leqq 1$ のとき，最大値，最小値を求めよ。また，そのときの $x$ の値を求めよ。

3

$x=1$ のとき $y=-1+3+9-7$

$=4$

$\left(\begin{array}{l} x=-2\text{ のとき } y=8+12-18-7 \\ \quad =-5 \end{array}\right)$




最大値 4 $(x=$ 1 $)$，最小値 $-12$ $(x=$ $-1$ $)$

16 方程式 $3x^4+4x^3-12x^2+5=a$ が異なる4個の実数解をもつように，定数 $a$ の値の範囲を定めよ。

$y=3x^4+4x^3-12x^2+5$ とすると，

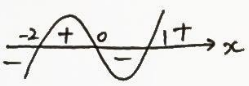
$y'=12x^3+12x^2-24x$

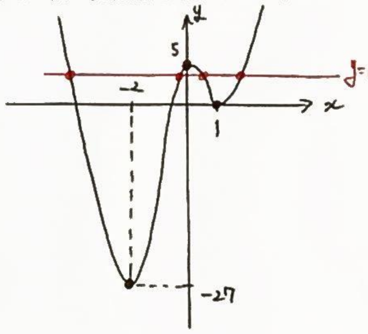
$y'=0$ とすると，

$12x(x^2+x-2)=0$

$12x(x+2)(x-1)=0$

$x=-2,0,1$




| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $-27$ | ↗ | $5$ | ↘ | $0$ | ↗ |

6　$0<a<5$