

練習 次の問いに答えなさい。

(1) 連続する2つの偶数の積に1を加えると、この2つの偶数の間にある奇数の平方になる。このことを証明しなさい。

(2) 連続する3つの自然数のそれぞれの2乗の和から5をひくと、最大の数と最小の数の積の3倍になる。このことを証明しなさい。

(3) 一の位の数が5である整数を2乗すると、つねに一の位の数が5で十の位の数が2の整数となる。このことを証明せよ。

(4) 4で割ると、1あまる整数と、4で割ると3あまる整数との積に1を加えた数は4の倍数である。このことを証明しなさい。

解答 次の問いに答えなさい。

(1) 連続する2つの偶数の積に1を加えると、この2つの偶数の間にある奇数の平方になる。このことを証明しなさい。

連続する2つの偶数を $2n$, $2n+2$ とする。(n は整数)

このとき、

$$\begin{aligned} 2n(2n+2)+1 &= 4n^2+4n+1 \\ &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

n は整数なので、 $(2n+1)$ は $2n$ と $2n+2$ の間の奇数

よって、連続する2つの偶数の積に1を加えると、この2つの偶数の間にある奇数の平方になる。

(2) 連続する3つの自然数のそれぞれの2乗の和から5をひくと、最大の数と最小の数の積の3倍になる。このことを証明しなさい。

連続する3つの自然数を $n-1$, n , $n+1$ とする。
(n は2以上の整数)

このとき、

$$\begin{aligned} (n-1)^2+n^2+(n+1)^2-5 \\ &= n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1-5 \\ &= 3n^2-3 \\ &= 3(n^2-1) \\ &= 3(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

よって、連続する3つの自然数のそれぞれの2乗の和から5をひくと、最大の数と最小の数の積の3倍になる。

(3) 一の位の数が5である整数を2乗すると、つねに一の位の数が5で十の位の数が2の整数となる。このことを証明せよ。

一の位の数が5である整数は、整数 n を使うと次のように表せる。

$$10n+5$$

この整数を2乗すると、

$$\begin{aligned} (10n+5)^2 \\ &= 100n^2+100n+25 \end{aligned}$$

したがって、つねに一の位の数が5で十の位の数が2の整数となる。

(4) 4で割ると、1あまる整数と、4で割ると3あまる整数との積に1を加えた数は4の倍数である。このことを証明しなさい。

4で割ると、1あまる整数は、整数 m を使うと次のように表せる。

$$4m+1$$

4で割ると3あまる整数は、整数 n を使うと次のように表せる。

$$4n+3$$

この2つの整数の積に1を加えると、

$$\begin{aligned} (4m+1)(4n+3)+1 \\ &= 16mn+12m+4n+3+1 \\ &= 16mn+12m+4n+4 \\ &= 4(4mn+3m+n) \end{aligned}$$

したがって、4の倍数である。