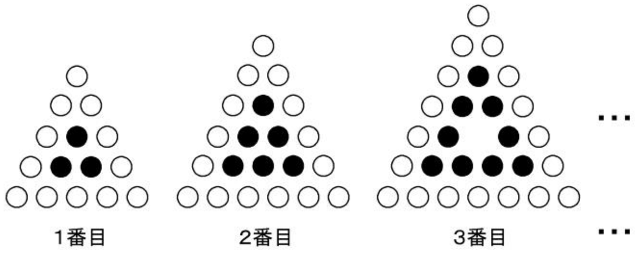
規則性攻略

攻略問題

1 下の図の1番目，2番目，3番目，…のように，黒い碁石と白い碁石をそれぞれ規則正しく並べて三角形が二重になった形をつくる。三角形の各辺には，同じ個数の碁石を並べるものとして，n 番目のときの白い碁石の個数を，n の式で表しなさい。



答　　　　　　　　　　個

2 下の図は，自然数を1から順番に，ある規則にしたがって並べたものである。たとえば，上から2行目，左から3列目にある数は8である。数12は上から5行目，左から4列目にある。この規則にしたがって自然数を並べていくとき，次の各問いに答えなさい。

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目	6列目	…
1行目	1	4	9	16			
2行目		3	8	15			
3行目		2	7	14			
4行目		1	6	13			
5行目			5	12			
6行目			4	11			
⋮			3	10			

(1) 上から1行目，左から6列目にある数を求めなさい。

答

(2) 数2005が最初にあらわれるのは上から何行目，左から何列目にあるか。その行と列を求めなさい。

答

3 下のように，自然数を順に6個ずつ並べた。次の各問いに答えなさい。

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目	6列目
1行目	1	2	3	4	5	6
2行目	7	8	9	10	11	12
3行目	13	14	15	16	17	18
4行目	19	20	21	22	23	24
5行目	25	26	27	28	29	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1) 花子さんは，気づいたことを次のように説明した。この説明が正しくなるように，①，②にあてはまる数を書きなさい。

n 行目の 5 列目の数を a として，下のような表にしました。
この表から，n の値が 1 ずつ増加すると，対応する a の値は ① ずつ増加し，$n=30$ のとき，$a=$ ② となることがわかります。

n	1	2	3	4	5	…
a	5	11	17	23	29	…

答　①

②

(2) 2005は何行目の何列目にあるか。書きなさい。

答

(3) 太郎さんは，「どの行でも，1列目の数と2列目の数の和は3の倍数となる」ことに気づき，このことを次のように証明した。①にはあてはまる式を書き，②には証明の続きを書いて，証明を正しく完成させなさい。

〔証明〕 n 行目の1列目の数は ① となり，

②

よって，3×(自然数)となり，3の倍数となる。

答　①

②

過去問題

平成6年

下の図1のように，長方形の対角線の交点を通る直線は，その長方形の面積を二等分します。

下の図2の斜線をつけた図形は，長方形ABCDから長方形EFGDを切りとった図形です。

この図形ABCGFEの面積を二等分する1本の直線を，定規を使ってひきなさい。

ただし，作図するためにかいた線は，消さないでおきなさい。

図1

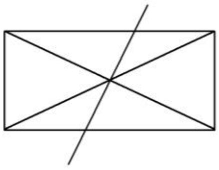
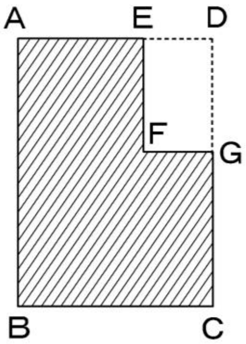
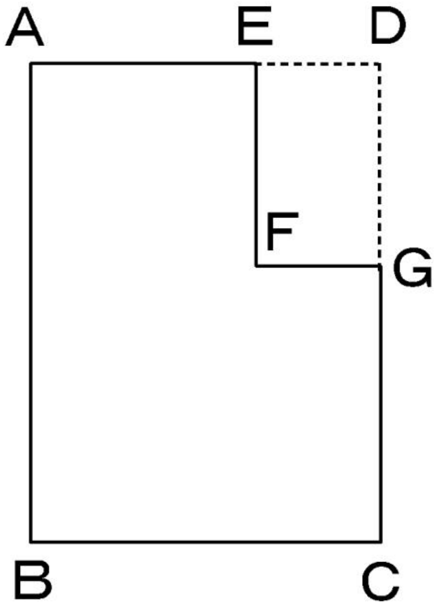


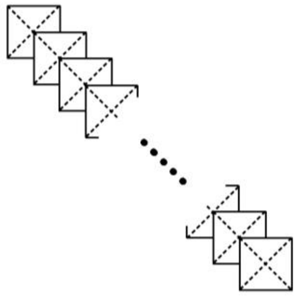
図2





平成9年

1辺の長さが4㎝の正方形の紙がたくさんあります。Tさんはこの紙を右の図のように，正方形の対角線の交点と他の正方形の頂点が互いに重なるように，1枚ずつ順番にはっていきました。



そして，Tさんは使った正方形の紙の枚数が増えるにつれて，「ともなって変わる量」として，次のア～ウがあることに気づきました。

ア　重なった部分の面積
イ　重なっていない部分の面積
ウ　できた図形の全体の面積

このとき，上のア～ウの中から，あなたが考えた面積を一つ選んで記号を書き，使った正方形の紙の枚数を x 枚とし，面積を y ㎠として，y を x の式で表しなさい。

答　記号　　　　　式

平成10年

下の図は，

1 番目の「数のグループ」には，

1

2 番目の「数のグループ」には，

1　2　1

3 番目の「数のグループ」には，

1　2　3　2　1

と，自然数を並べ，5番目までの「数のグループ」をつくったところです。

1 番目	1
2 番目	1　2　1
3 番目	1　2　3　2　1
4 番目	1　2　3　4　3　2　1
5 番目	1　2　3　4　5　4　3　2　1
⋮	⋮

Tさんは，その後も同じ規則で自然数を並べていき，x 番目の「数のグループ」にある自然数について考えたところ，x の数が増えるにつれて，「ともなって変わる量」として，次のア～ウがあることがわかりました。

ア　x 番目の「数のグループ」にある偶数の個数
イ　x 番目の「数のグループ」にある自然数の個数
ウ　x 番目の「数のグループ」にある自然数の和

上のア～ウの中から，どれか一つ選んで記号を書き，そのときの「ともなって変わる量」を y とし，y を x の式で表しなさい。

答　記号　　　　　　　式

平成11年

「5の倍数と5の倍数の和は，5の倍数になる。」ことを学んだあと，5以上の自然数を下の表のように，ある規則に従って並べ，AからEの5つのグループにまとめました。

グループ	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	…
A	5	10	15	20	…
B	6	11	16	21	…
C	7	12	17	22	…
D	8	13	18	23	…
E	9	14	19	24	…

Sさんは，グループAが 5 の倍数の集まりであることに気づき，「グループAにある 2 つの数を取り出し，それらの和に着目すると，その和が必ずグループAの数になる。」と予想し，学習した内容の理解を深めました。

また，Tさんは，2 つのグループの数をそれぞれ 1 つずつ取り出し，その数の和に着目して，その和がどのグループの数になるか調べ，次の具体例をもとに，下のような予想を立てました。

Tさんの予想のもとになった具体例

グループBの数		グループCの数		和
6	＋	7	＝	13（グループDの数）
6	＋	12	＝	18（グループDの数）
11	＋	12	＝	23（グループDの数）

Tさんの予想

グループBの数とグループCの和は，必ずグループDの数になる。

SさんとTさんのように，1 つのグループまたは 2 つのグループについて，それらのグループから取り出した 2 つの数の和に着目して，その和がどのグループの数になるか予想を立てなさい。さらに，その予想が成り立つわけを説明しなさい。

ただし，SさんとTさんの考えた例と異なる予想を答えなさい。

（予想）

（成り立つわけ）

平成15年

縦が6cm，横が x cmの長方形の紙があります。ただし，x は整数とし，$7 \leqq x \leqq 11$ とします。

この長方形の紙から，短いほうの辺を1辺とする正方形を切り取り，残った長方形が正方形でないときは，さらに，その長方形の短いほうの辺を1辺とする正方形を切り取ります。

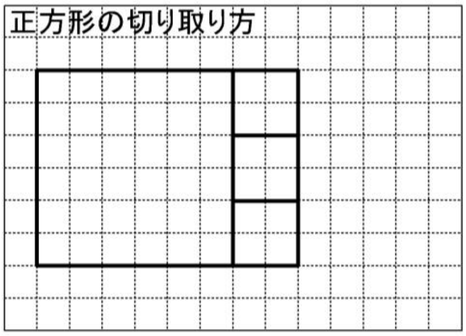
この作業を，残った長方形が正方形になるまで続けて，最後に残った正方形の1辺の長さを調べます。

Tさんが，$x=8$ と $x=11$ のときに，この作業をしたところ，最後に残った正方形の 1 辺の長さは，それぞれ 2 cmと 1 cmでした。

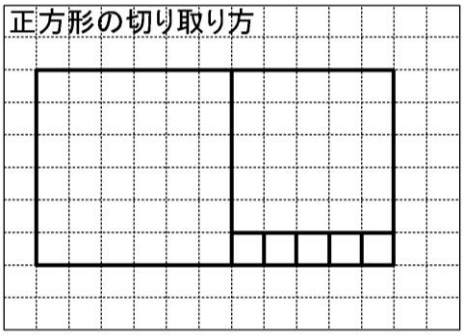
このとき，Tさんは，正方形の切り取り方を，下の図のようにかきました。ただし，図の 1 目盛りを 1 cmとします。

また，「x の値と最後に残った正方形の1辺の長さ」を，「$x=8$ のとき2cm」，「$x=11$ のとき1cm」のように表しました。

$x=8$ のとき



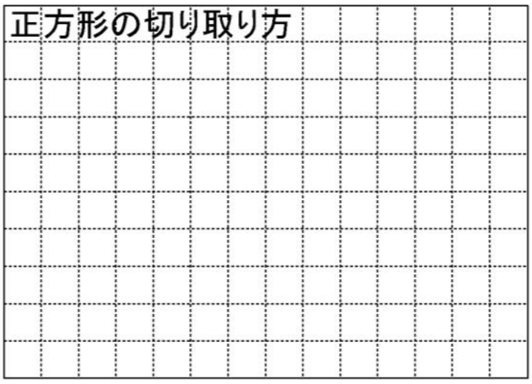
$x=11$ のとき



$x=8$，$x=11$ 以外の x の値を 1 つ選んで，そのときの正方形の切り取り方を，上の図のようにかきなさい。ただし，解答欄の図の 1 目盛りを 1 cmとします。

また，$x=8$，$x=11$ 以外のすべての x の値について，最後に残った正方形の 1 辺の長さを求め，「x の値と最後に残った正方形の 1 辺の長さ」を，Tさんのように表して答えなさい。

考えるときに，問題中の上の図を利用してもさしつかえありません。



答

平成17年

ある工場で製造したn個の製品は，形や大きさが同じですが，そのうちの1個は，重さが10gの良品より少し軽い不良品で，その他はすべて良品です。

ここで，台ばかりを1台使って不良品を見つける場合，製品の個数と台ばかりではかる回数との関係について考えると，製品を1個ずつはかれば，台ばかりでn回はかるまでに必ず見つけられます。そこで，下の例1～例3のように《はかり方》を工夫して，偶然でなく，必ず不良品を見つけられる最も少ない「回数」を求めることとします。

例1　$n=2$のとき

（製品が2個で，不良品が1個含まれている場合）

《はかり方》

- 1個をのせて，10gより軽ければ不良品，10gなら，残りが不良品である。

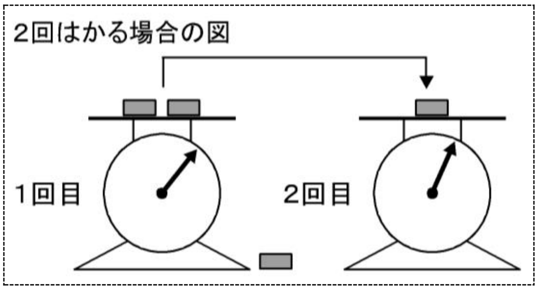
【必ず見つけられる最も少ない「回数」】1回

例2　$n=3$のとき

（製品が3個で，不良品が1個含まれている場合）

《はかり方》

- 2個をのせて，偶然20gの場合，残りが不良品である。
- 2個をのせて，20gより軽ければ，この2個に不良品があるので，例1のように，あと1回はかれば必ず見つけられる。



【必ず見つけられる最も少ない「回数」】2回

例3　$n=5$のとき

（製品が5個で，不良品が1個含まれている場合）

《はかり方》

- 3個をのせて，偶然30gの場合，残りの2個に不良品があるので，例1のように，あと1回はかれば見つけられる。
- 3個をのせて，30gより軽ければ，この3個に不良品があるので，例2のように，あと2回はかれば必ず見つけられる。

【必ず見つけられる最も少ない「回数」】3回

例1～例3の考え方をもとにして，次のア，イに答えなさい。

ア　$n=4$のとき，台ばかりで何回はかれば，偶然でなく，必ず不良品が見つけられますか。必ず見つけられる最も少ない「回数」を求めなさい。

答　　　　　　回

イ　台ばかりで3回はかれば，偶然でなく，必ず不良品を見つけられるのは，製品の個数nが最大何個のときですか。その個数nを求めなさい。

答

平成 21 年

次の各問に答えなさい。

(1) たくさんの正方形の黒タイル，白タイルがあり，1 辺の長さはそれぞれ 1 ㎝，3 ㎝です。この白タイルを 1 ㎝間隔で横一列に並べて，その周りを黒タイルですき間なく重ならないように左から順に囲み，そのとき使う黒タイルの枚数を調べます。白タイル 1 枚を囲むときは，図 1 のように黒タイルは全部で 16 枚使います。白タイル 2 枚を囲むときは，図 2 のように黒タイルは全部で 27 枚使います。白タイル 7 枚を囲むとき，黒タイルは全部で何枚使いますか。その枚数を求めなさい。

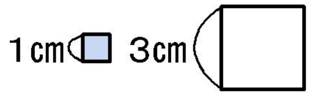


図 1

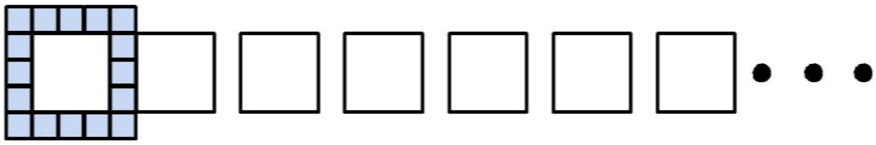
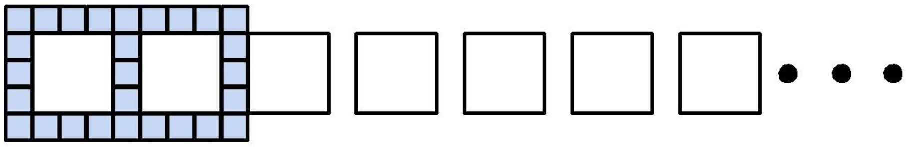
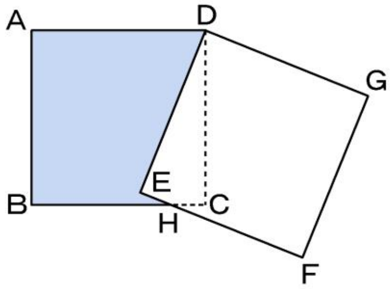


図 2



答　　　　　　　　枚

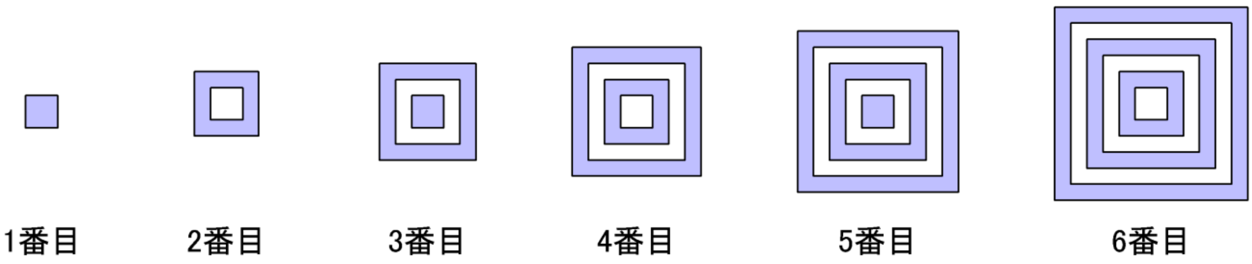
(2) 右の図のように，1 辺の長さが a ㎝の合同な正方形ABCD，DEFGが重なっています。辺BC，EFの交点をHとしたとき，BH＝b ㎝となりました。このとき，図のかげ（　　）をつけた部分の面積を a，b を用いて表しなさい。



答　　　　　　　　㎠

平成 22 年後期

1 辺の長さが 1 ㎝の正方形があり，これを 1 番目の図形とします。この正方形の周りに 1 辺の長さが 2 ㎝の正方形をかき，2 番目の図形とします。同じようにして，1 辺の長さが 3 ㎝，4 ㎝，5 ㎝，6 ㎝の正方形を順番に周りにかいて，3 番目，4 番目，5 番目，6 番目と図形をつくっていきます。それぞれの図形に，次の図のようにかげ（　　　）をつけ，その部分の面積を考えます。下の表は，その結果をまとめたものです。このとき，6 番目の図形のかげ（　　　）をつけた部分の面積を求めなさい。

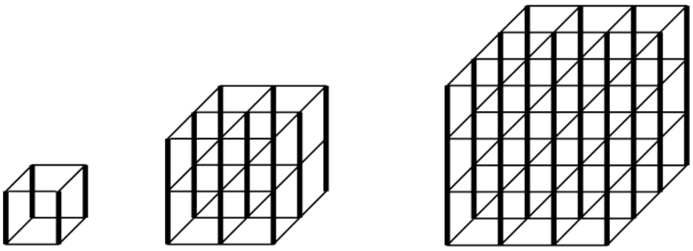


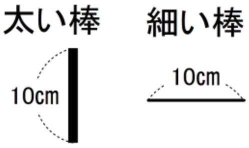
図形	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	5 番目	6 番目
面積(㎠)	1	3				

答　　　　　　　　　　㎠

平成 23 年後期

下の図のような，長さ 10 ㎝の太い棒と長さ 10 ㎝の細い棒がたくさんあります。太い棒を縦の柱として，細い棒を横木として使って，下の図のような一辺が 10 ㎝，20 ㎝，30 ㎝の立方体の形をつくりました。Sさんは，使った太い棒と細い棒の本数を工夫して数えて，その結果を下の表にまとめました。一辺が 30 ㎝の立方体に使った太い棒と細い棒の本数の合計を求めなさい。





1辺の長さ(㎝)	10	20	30
太い棒	4本×1段	9本×2段	
細い棒	4本×2段	12本×3段	
合計(本)	12	54	

答　　　　　　　　本

平成 23 年前期

$\sqrt{1+3+5}=\sqrt{9}=3$ のように，連続する 3 つの奇数の和の平方根が整数となる場合を見つけるため，Sさんは，次のような方法を考えました。下の各問に答えなさい。

Sさんの考えた方法

n を整数とすれば，連続する3つの奇数は $2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表される。この3つの奇数の和は，
$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n+1)$ となる。
この3つの奇数の和の平方根 $\sqrt{3(2n+1)}$ が整数となるので，$3(2n+1)=3^2\times(\text{ある数})^2$ と表される。
さらに $2n+1$ は奇数なので，(ある数)を小さい数から順に考えると，
$3(2n+1)=3^2\times1^2$　これを解くと $n=1$ だから，3つの奇数は1，3，5となる。
$3(2n+1)=3^2\times3^2$　これを解くと $n=13$ だから，3つの奇数は25，27，29となる。
$3(2n+1)=3^2\times5^2$　これを解くと $n=$ $\boxed{\text{ア}}$ だから，3つの奇数は $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ となる。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数を，それぞれ書きなさい。

答　$\boxed{\text{ア}}$　　$\boxed{\text{イ}}$　　$\boxed{\text{ウ}}$　　$\boxed{\text{エ}}$

(2)　連続する5つの奇数の和の平方根も，例えば，$\sqrt{1+3+5+7+9}=\sqrt{25}=5$ のように整数となる場合があります。$\sqrt{1+3+5+7+9}$ 以外で最も小さい連続する5つの奇数を求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

答

平成 25 年

次は，花子さんと太郎さんが数あてⅠ，数あてⅡをしたときの会話です。これを読んで，下のア，イに答えなさい。なお，考えるときに，表 1，表 2 を利用してもさしつかえありません。

数あてⅠ

花子さん
「今から，数あてをします。頭の中で考えてください。」
「好きな自然数を1つ考えて，その数をAとしてください。」
「Aに1を加えて，その数を2倍して，Bとしてください。」
「Bに8を加えて，その数を2でわって，Cとしてください。」
「CからAをひいて，その数をDとしてください。」
「Aを知らなくても，Dは分かります。Dは，$\boxed{①}$ですね。」
太郎さん
「すごい，正解です。」

表 1

A	B	C	D

ア $\boxed{①}$にあてはまる数を求めなさい。

答

数あてⅡ

花子さん
「次は，太郎さんの考える2けたの自然数をあててみせます。」

「2けたの自然数を1つ考えて，その数をEとしてください。」

「Eの十の位の数を5倍して，その数から2をひいて，Fとしてください。」

「Fを2倍して，その数にEの一の位の数を加えて，Gとしてください。」

「Gは，いくつになりましたか。」

太郎さん
「68になりました。」

花子さん
「はじめに考えた2けたの自然数Eは，72ですね。」

太郎さん
「正解です。なぜ分かったのですか。」

花子さん
「計算した答えGに4を加えると，必ず，はじめに考えた自然数Eになるのですぐに分かるのです。」

表 2

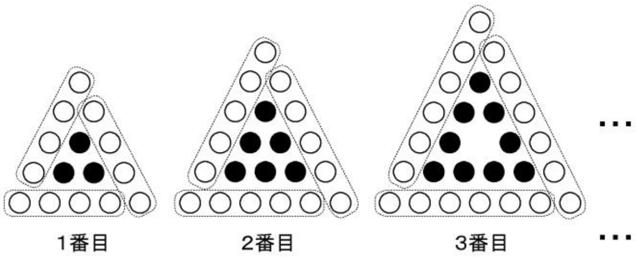
E	F	G

イ　なぜ，計算した答えGに4を加えた数が，はじめに考えた自然数Eになるのでしょうか。はじめに考えた2けたの自然数Eの十の位の数をa，一の位の数をbとして，そのわけを説明しなさい。

解答　規則性攻略

攻略問題

1　下の図の1番目，2番目，3番目，…のように，黒い碁石と白い碁石をそれぞれ規則正しく並べて三角形が二重になった形をつくる。三角形の各辺には，同じ個数の碁石を並べるものとして，n 番目のときの白い碁石の個数を，n の式で表しなさい。



★
上の様にくくってみると，
n 番目のとき，$3\times(n+3)$ 個が白い碁石の個数となる。
$3(n+3)=3n+9$

答　$(3n+9)$　個

2　下の図は，自然数を1から順番に，ある規則にしたがって並べたものである。たとえば，上から2行目，左から3列目にある数は8である。数12は上から5行目，左から4列目にある。この規則にしたがって自然数を並べていくとき，次の各問いに答えなさい。

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目	6列目	…
1行目	1	4	9	16			
2行目		3	8	15			
3行目		2	7	14			
4行目		1	6	13			
5行目			5	12			
6行目			4	11			
⋮			3	10			

(1)　上から1行目，左から6列目にある数を求めなさい。

★
1 行目の数は，1，4，9，16…と n^2 になっている。
$6^2=36$

答　36

(2)　数2005が最初にあらわれるのは上から何行目，左から何列目にあるか。その行と列を求めなさい。

★
n 列の 1 行目の数は n^2
n 列の 2 行目の数は n^2-1　$(n\geqq 2)$
n 列の m 行目の数は $n^2-(m-1)=n^2-m+1$　となる

$44^2<2005<45^2$
$(1936<2005<2025)$ となるので，
2005 は 45 列目だとわかる

45 列目の 1 行目は 2025
よって，
$2025-2005=20$
$20+1=21$
21 行目とわかる

答　上から21行目，左から45列目

3 下のように，自然数を順に6個ずつ並べた。次の各問いに答えなさい。

	1列目	2列目	3列目	4列目	5列目	6列目
1行目	1	2	3	4	5	6
2行目	7	8	9	10	11	12
3行目	13	14	15	16	17	18
4行目	19	20	21	22	23	24
5行目	25	26	27	28	29	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1) 花子さんは，気づいたことを次のように説明した。この説明が正しくなるように，①，②にあてはまる数を書きなさい。

n 行目の 5 列目の数を a として，下のような表にしました。
この表から，n の値が 1 ずつ増加すると，対応する a の値は ① ずつ増加し，$n=30$ のとき，$a=$ ② となることがわかります。

n	1	2	3	4	5	…
a	5	11	17	23	29	…

6　6　6　6

★
差が同じならこれを使う
初項 ＋ 差$(n-1)$

①
$5+6(n-1)=5+6n-6$
$=6n-1$

②
$6\times30-1=180-1$
$=179$

答 ① 6
② 179

(2) 2005は何行目の何列目にあるか。書きなさい。

★
6個ずつ並べているので，
「6で割って余りを判断すればよい」
2005÷6 を計算すると商が334で余りが1

	1	2	3	4	5	6
334行目	1999	2000	2001	2002	2003	2004
335行目	2005					

よって，335行目で1列目とわかる。

答 335行目の1列目

(3) 太郎さんは，「どの行でも，1列目の数と2列目の数の和は3の倍数となる」ことに気づき，このことを次のように証明した。①にはあてはまる式を書き，②には証明の続きを書いて，証明を正しく完成させなさい。

〔証明〕 n 行目の1列目の数は ① となり，

②

よって，3×（自然数）となり，3の倍数となる。

★
①

行目	1	2	3	4	5	…
	1	7	13	19	25	…

6　6　6　6

初項＋差$(n-1)$

$1+6(n-1)=1+6n-6$
$=6n-5$

②
i) 2 列目
$2+6(n-1)$
$=2+6n-6$
$=6n-4$

ii)
$(6n-5)+(6n-4)$
$=12n-9$
$=3(4n-3)$

答 ① $6n-5$
② n 行目の2列目の数は $6n-4$ と表すことができる。
n 行目の1列目と2列目の数の和は，
$(6n-5)+(6n-4)=12n-9=3(4n-3)$

過去問題

平成6年

下の図1のように，長方形の対角線の交点を通る直線は，その長方形の面積を二等分します。

下の図2の斜線をつけた図形は，長方形ABCDから長方形EFGDを切りとった図形です。

この図形ABCGFEの面積を二等分する1本の直線を，定規を使ってひきなさい。

ただし，作図するためにかいた線は，消さないでおきなさい。

図1

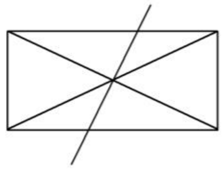
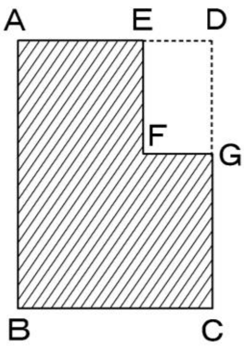


図2

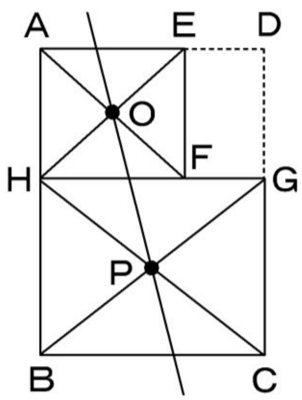


★ 平行四辺形は 2 本の対角線の交点(対角線の中点)を通る直線で面積は二等分される。

GFの延長とABとの交点をH，長方形AHFE，HBCGの対角線の交点をそれぞれO，Pとする。

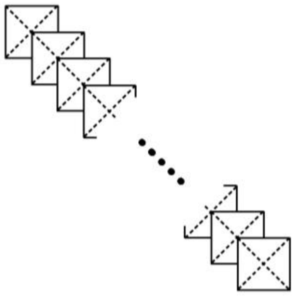
Oを通る直線が長方形AHFEを，Pを通る直線が長方形HBCGをそれぞれ二等分する。

図形ABCGFEの面積は，2 つの長方形AHFE，HBCGの面積の和に等しいから，2 点O，Pを通る直線をひけばよい。



平成9年

1辺の長さが4cmの正方形の紙がたくさんあります。Tさんはこの紙を右の図のように，正方形の対角線の交点と他の正方形の頂点が互いに重なるように，1枚ずつ順番にはっていきました。



そして，Tさんは使った正方形の紙の枚数が増えるにつれて，「ともなって変わる量」として，次のア～ウがあることに気づきました。

ア 重なった部分の面積
イ 重なっていない部分の面積
ウ できた図形の全体の面積

このとき，上のア～ウの中から，あなたが考えた面積を一つ選んで記号を書き，使った正方形の紙の枚数を x 枚とし，面積を y ㎠として，y を x の式で表しなさい。

★ アを選んだ場合

重なった部分(Ⓐとする)は，1 辺が 2 cmの正方形だから，面積は，$2\times2=4$ (㎠)

正方形の紙が x 枚のとき，Ⓐは，$x-1$ (個)あるので，

$y=4(x-1)$

よって，$y=4x-4$

答 記号 ア 式 $y=4x-4$

★ イを選んだ場合

両端の紙のⒶ以外の部分の面積は，Ⓐ3 個分

また，間にある紙では，Ⓐ2 個分であり，$x-2$ (枚)あるから，$y=4\times3\times2+4\times2\times(x-2)$

よって，$y=8x+8$

答 記号 イ 式 $y=8x+8$

★ ウを選んだ場合

アとイの合計なので，$y=(4x-4)+(8x+8)$

よって，$y=12x+4$

別解

$16+12(x-1)=12x+4$

答 記号 ウ 式 $y=12x+4$

平成10年

下の図は，

1 番目の「数のグループ」には，

1

2 番目の「数のグループ」には，

1　2　1

3 番目の「数のグループ」には，

1　2　3　2　1

と，自然数を並べ，5番目までの「数のグループ」をつくったところです。

1 番目	1
2 番目	1　2　1
3 番目	1　2　3　2　1
4 番目	1　2　3　4　3　2　1
5 番目	1　2　3　4　5　4　3　2　1
⋮	⋮

Tさんは，その後も同じ規則で自然数を並べていき，x 番目の「数のグループ」にある自然数について考えたところ，x の数が増えるにつれて，「ともなって変わる量」として，次のア～ウがあることがわかりました。

ア　x 番目の「数のグループ」にある偶数の個数
イ　x 番目の「数のグループ」にある自然数の個数
ウ　x 番目の「数のグループ」にある自然数の和

上のア～ウの中から，どれか一つ選んで記号を書き，そのときの「ともなって変わる量」を y とし，y を x の式で表しなさい。

★　アを選んだとき

	1	2	3	4	…	x
個数	0	1	2	3	…	$x-1$

答　記号　ア　式　$y=x-1$

★　イを選んだとき

	1	2	3	4	…	x
個数	1	3	5	7	…	$2x-1$

答　記号　イ　式　$y=2x-1$

★　ウを選んだとき

	1	2	3	4	…	x
和	1	4	9	16	…	x^2

答　記号　ウ　式　$y=x^2$

平成11年

「5の倍数と5の倍数の和は，5の倍数になる。」ことを学んだあと，5以上の自然数を下の表のように，ある規則に従って並べ，AからEの5つのグループにまとめました。

グループ	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	…
A	5	10	15	20	…
B	6	11	16	21	…
C	7	12	17	22	…
D	8	13	18	23	…
E	9	14	19	24	…

Sさんは，グループAが 5 の倍数の集まりであることに気づき，「グループAにある 2 つの数を取り出し，それらの和に着目すると，その和が必ずグループAの数になる。」と予想し，学習した内容の理解を深めました。

また，Tさんは，2 つのグループの数をそれぞれ 1 つずつ取り出し，その数の和に着目して，その和がどのグループの数になるか調べ，次の具体例をもとに，下のような予想を立てました。

Tさんの予想のもとになった具体例

グループB の数		グループC の数		和
6	＋	7	＝	13（グループDの数）
6	＋	12	＝	18（グループDの数）
11	＋	12	＝	23（グループDの数）

Tさんの予想

グループBの数とグループCの和は，必ずグループDの数になる。

SさんとTさんのように，1 つのグループまたは 2 つのグループについて，それらのグループから取り出した 2 つの数の和に着目して，その和がどのグループの数になるか予想を立てなさい。さらに，その予想が成り立つわけを説明しなさい。

ただし，SさんとTさんの考えた例と異なる予想を答えなさい。

（予想）
（例）グループBの数とグループDの数の和は，必ずグループEの数になる。

（成り立つわけ）
（例）グループB，D，Eは，それぞれ5の倍数より1，3，4多い数の集まりである。そして，グループBとDから取り出した数の和は，5の倍数より4多い数となり，必ずグループEの数になる。

平成15年

縦が6cm，横が x cmの長方形の紙があります。ただし，x は整数とし，$7 \leqq x \leqq 11$とします。

この長方形の紙から，短いほうの辺を1辺とする正方形を切り取り，残った長方形が正方形でないときは，さらに，その長方形の短いほうの辺を1辺とする正方形を切り取ります。

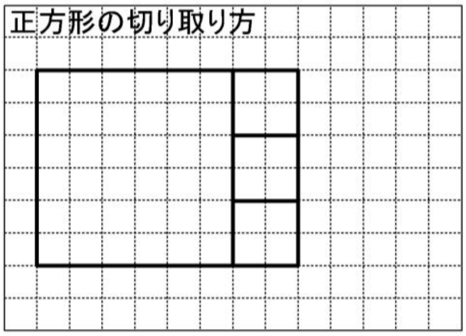
この作業を，残った長方形が正方形になるまで続けて，最後に残った正方形の1辺の長さを調べます。

Tさんが，$x=8$ と $x=11$ のときに，この作業をしたところ，最後に残った正方形の 1 辺の長さは，それぞれ 2 cmと 1 cmでした。

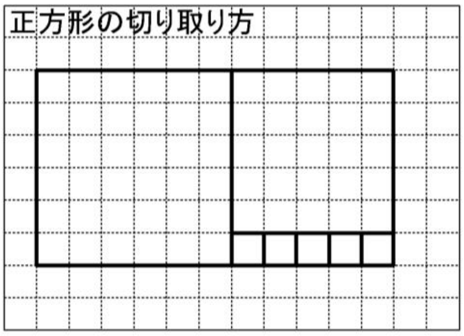
このとき，Tさんは，正方形の切り取り方を，下の図のようにかきました。ただし，図の 1 目盛りを 1 cmとします。

また，「x の値と最後に残った正方形の1辺の長さ」を，「$x=8$ のとき2cm」，「$x=11$ のとき1cm」のように表しました。

$x=8$ のとき



$x=11$ のとき



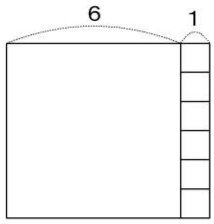
$x=8$，$x=11$ 以外の x の値を 1 つ選んで，そのときの正方形の切り取り方を，上の図のようにかきなさい。ただし，解答欄の図の 1 目盛りを 1 cmとします。

また，$x=8$，$x=11$ 以外のすべての x の値について，最後に残った正方形の 1 辺の長さを求め，「x の値と最後に残った正方形の 1 辺の長さ」を，Tさんのように表して答えなさい。

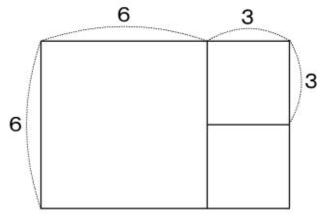
考えるときに，問題中の上の図を利用してもさしつかえありません。

★

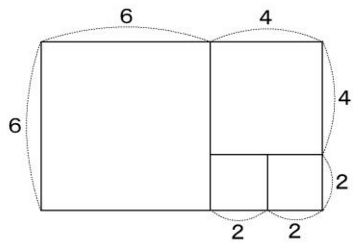
$x=7$ のとき



$x=9$ のとき



$x=10$ のとき



答

「$x=7$ のとき 1 cm」
「$x=9$ のとき 3 cm」
「$x=10$ のとき2cm」

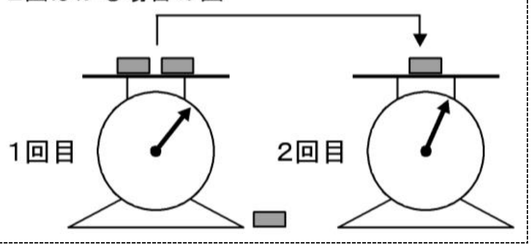
平成17年

　ある工場で製造した n 個の製品は，形や大きさが同じですが，そのうちの１個は，重さが 10g の良品より少し軽い不良品で，その他はすべて良品です。
　ここで，台ばかりを１台使って不良品を見つける場合，製品の個数と台ばかりではかる回数との関係について考えると，製品を１個ずつはかれば，台ばかりで n 回はかるまでに必ず見つけられます。そこで，下の例１～例３のように《はかり方》を工夫して，偶然でなく，必ず不良品を見つけられる最も少ない「回数」を求めることとします。

例１　$n=2$ のとき
（製品が２個で，不良品が１個含まれている場合）
《はかり方》
・１個をのせて，10g より軽ければ不良品，10g なら，残りが不良品である。
【必ず見つけられる最も少ない「回数」】１回

例２　$n=3$ のとき
（製品が３個で，不良品が１個含まれている場合）
《はかり方》
・２個をのせて，偶然 20g の場合，残りが不良品である。
・２個をのせて，20g より軽ければ，この２個に不良品があるので，例１のように，あと１回はかれば必ず見つけられる。

2回はかる場合の図



【必ず見つけられる最も少ない「回数」】２回

例３　$n=5$ のとき
（製品が５個で，不良品が１個含まれている場合）
《はかり方》
・３個をのせて，偶然 30g の場合，残りの２個に不良品があるので，例１のように，あと１回はかれば見つけられる。
・３個をのせて，30g より軽ければ，この３個に不良品があるので，例２のように，あと２回はかれば必ず見つけられる。
【必ず見つけられる最も少ない「回数」】３回

　例１～例３の考え方をもとにして，次のア，イに答えなさい。

ア　$n=4$ のとき，台ばかりで何回はかれば，偶然でなく，必ず不良品が見つけられますか。必ず見つけられる最も少ない「回数」を求めなさい。

★
i)　2個を台ばかりにのせて20gの場合，残りの2個に不良品があるので，例1のように，あと1回はかれば不良品を見つけられる。

ii)　2個を台ばかりにのせて，20gより軽ければ，この2個のどちらかに不良品があるので，例1のように，あと1回はかれば不良品を見つけられる。

答　　2　　回

イ　台ばかりで3回はかれば，偶然でなく，必ず不良品を見つけられるのは，製品の個数 n が最大何個のときですか。その個数 n を求めなさい。

★
i)　アより，$n=4$ のとき2回。例3で $n=5$ のときは3回。
よって，2回ではかれる最大の個数は4個。

ii)　3回はかれば必ず不良品を見つけられるようにするためには，1回はかった後の製品の個数が4個以下になればよい。

この条件で，製品の個数が最も多くなるのは，１回目に４個のせ，のこりが４個の場合。
よって，$n=4+4=8$

答　　$n=8$

平成 21 年

次の各問に答えなさい。

(1) たくさんの正方形の黒タイル，白タイルがあり，1 辺の長さはそれぞれ 1 ㎝，3 ㎝です。この白タイルを 1 ㎝間隔で横一列に並べて，その周りを黒タイルですき間なく重ならないように左から順に囲み，そのとき使う黒タイルの枚数を調べます。白タイル 1 枚を囲むときは，図 1 のように黒タイルは全部で 16 枚使います。白タイル 2 枚を囲むときは，図 2 のように黒タイルは全部で 27 枚使います。白タイル 7 枚を囲むとき，黒タイルは全部で何枚使いますか。その枚数を求めなさい。

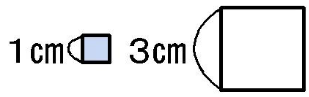


図 1

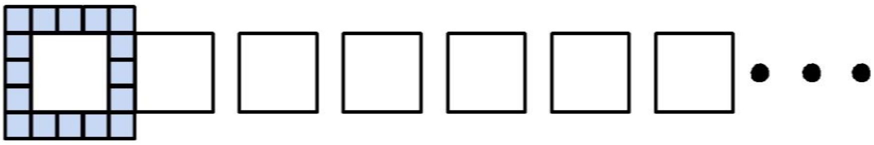
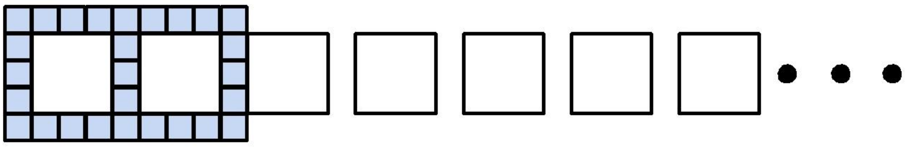


図 2



★ 差が同じならこれを使う

$\boxed{\text{初項} + \text{差}(n-1)}$

1 枚目の白タイルを囲むのに 16 枚の黒タイルが必要。

2 枚目以降の白タイルでは，11 枚ずつの黒タイルが必要。

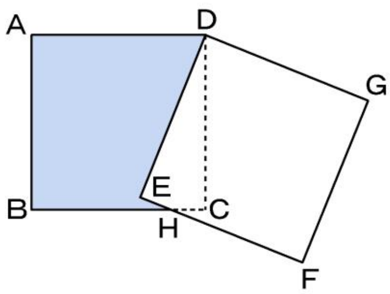
$16+11(n-1)=11n+5$

白タイルは 7 枚なので，$n=7$を代入すると，

$11\times 7+5=82$（枚）

答　82　枚

(2) 右の図のように，1 辺の長さが a ㎝の合同な正方形ABCD，DEFGが重なっています。辺BC，EFの交点をHとしたとき，BH＝b ㎝となりました。このとき，図のかげ（　）をつけた部分の面積を a，b を用いて表しなさい。



★ DHを結ぶ。

△DEHと△DCHにおいて，

∠DEH＝∠DCH＝90°…①

DH＝DH（共通）…②

DE＝DC＝a ㎝…③

①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので，

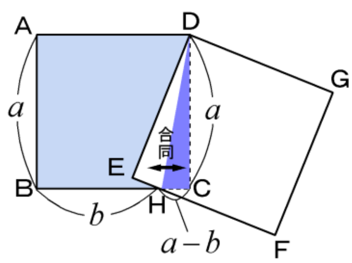
△DEH≡△DCH

よって，かげをつけた部分の面積は，

（正方形ABCD）－△DEH－△DCH

＝（正方形ABCD）－2△DCH

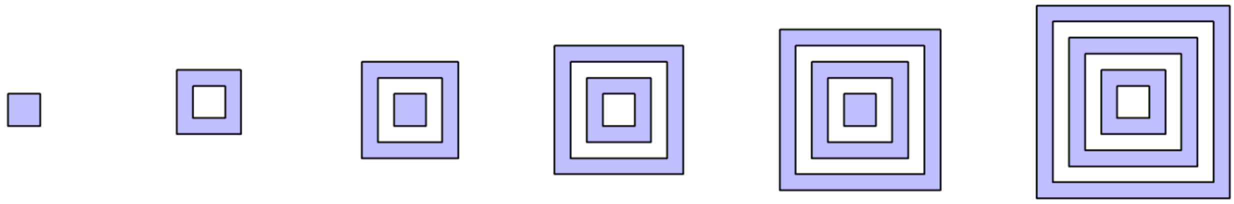
$=a^2-2\times\frac{1}{2}\times a\times(a-b)=ab$（㎠）



答　ab　㎠

平成 22 年後期

1 辺の長さが 1 cmの正方形があり，これを 1 番目の図形とします。この正方形の周りに 1 辺の長さが 2 cmの正方形をかき，2 番目の図形とします。同じようにして，1 辺の長さが 3 cm，4 cm，5 cm，6 cmの正方形を順番に周りにかいて，3 番目，4 番目，5 番目，6 番目と図形をつくっていきます。それぞれの図形に，次の図のようにかげ（　　　）をつけ，その部分の面積を考えます。下の表は，その結果をまとめたものです。このとき，6 番目の図形のかげ（　　　)をつけた部分の面積を求めなさい。



1番目　2番目　3番目　4番目　5番目　6番目

図形	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	5 番目	6 番目
面積(cm^2)	1	3				

★

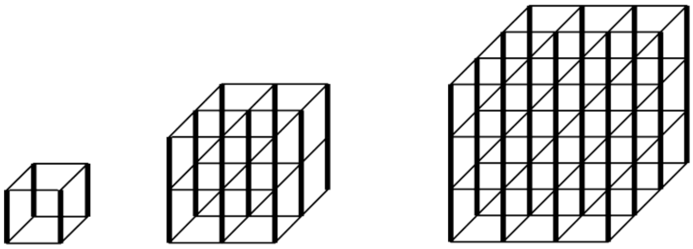
図形	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	5 番目	6 番目
面積(cm^2)	1	3	6	10	15	21

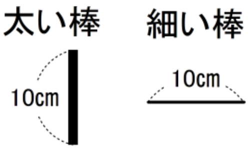
$6\times6-5\times5+4\times4-3\times3+2\times2-1\times1$
$=36-25+16-9+4-1$
$=21$

答　21　cm^2

平成 23 年後期

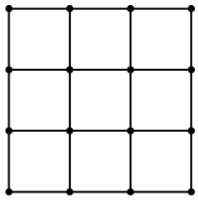
下の図のような，長さ 10 cmの太い棒と長さ 10 cmの細い棒がたくさんあります。太い棒を縦の柱として，細い棒を横木として使って，下の図のような一辺が 10 cm，20 cm，30 cmの立方体の形をつくりました。Sさんは，使った太い棒と細い棒の本数を工夫して数えて，その結果を下の表にまとめました。一辺が 30 cmの立方体に使った太い棒と細い棒の本数の合計を求めなさい。





1辺の長さ(cm)	10	20	30
太い棒	4本×1段	9本×2段	48
細い棒	4本×2段	12本×3段	96
合計(本)	12	54	144

★
1辺が30cmの立方体を真上から見ると，細い棒は3×4×2＝24 本
太い棒は黒丸のところなので，4×4＝16 本



太い棒は3段あり，細い棒は4段あるので，
16本×3段＋24本×4段
＝48＋96
＝144

答　144　本

平成 23 年前期

$\sqrt{1+3+5}=\sqrt{9}=3$ のように，連続する 3 つの奇数の和の平方根が整数となる場合を見つけるため，Sさんは，次のような方法を考えました。下の各問に答えなさい。

Sさんの考えた方法

> n を整数とすれば，連続する3つの奇数は $2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表される。この3つの奇数の和は，
> $(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n+1)$ となる。
> この3つの奇数の和の平方根 $\sqrt{3(2n+1)}$ が整数となるので，$3(2n+1)=3^2\times(\text{ある数})^2$ と表される。
> さらに $2n+1$ は奇数なので，(ある数)を小さい数から順に考えると，
> $3(2n+1)=3^2\times1^2$　これを解くと $n=1$ だから，3つの奇数は1，3，5となる。
> $3(2n+1)=3^2\times3^2$　これを解くと $n=13$ だから，3つの奇数は25，27，29となる。
> $3(2n+1)=3^2\times5^2$　これを解くと $n=\boxed{ア}$ だから，3つの奇数は $\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ となる。

(1)　$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ にあてはまる数を，それぞれ書きなさい。

★

$3(2n+1)=3^2\times5^2$

$2n+1=75$

$2n=74$

$n=37$

$2\times37-1=73$

$2\times37+1=75$

$2\times37+3=77$

答　$\boxed{ア}$　37　$\boxed{イ}$　73　$\boxed{ウ}$　75　$\boxed{エ}$　77

(2)　連続する5つの奇数の和の平方根も，例えば，$\sqrt{1+3+5+7+9}=\sqrt{25}=5$ のように整数となる場合があります。$\sqrt{1+3+5+7+9}$ 以外で最も小さい連続する5つの奇数を求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

★

(例)

n を整数とすれば，連続する5つの奇数は，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$，$2n+7$ と表される。

この5つの奇数の和は，

$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)=10n+15=5(2n+3)$ となる。

この5つの奇数の和の平方根 $\sqrt{5(2n+3)}$ が整数となるので，

$5(2n+3)=5^2\times(\text{ある数})^2$ と表される。さらに，$2n+3$ は奇数なので，(ある数)を小さい数から順に考えると，

$5(2n+3)=5^2\times1^2$　これを解くと $n=1$ だから，5つの奇数は1，3，5，7，9となる。

次に，$5(2n+3)=5^2\times3^2$　これを解くと $n=21$ である。よって，連続する5つの奇数は $\boxed{41}$，$\boxed{43}$，$\boxed{45}$，$\boxed{47}$，$\boxed{49}$ となる。

答　41，43，45，47，49

平成 25 年

次は，花子さんと太郎さんが数あてⅠ，数あてⅡをしたときの会話です。これを読んで，下のア，イに答えなさい。なお，考えるときに，表 1，表 2 を利用してもさしつかえありません。

数あてⅠ

花子さん
「今から，数あてをします。頭の中で考えてください。」
「好きな自然数を1つ考えて，その数をAとしてください。」
「Aに1を加えて，その数を2倍して，Bとしてください。」
「Bに8を加えて，その数を2でわって，Cとしてください。」
「CからAをひいて，その数をDとしてください。」
「Aを知らなくても，Dは分かります。Dは，①ですね。」
太郎さん
「すごい，正解です。」

表 1

A	(例) 4	B	(例) 10	C	(例) 9	D	(例) 5

ア ①にあてはまる数を求めなさい。

★
花子さんのいうとおりに計算していく。
「好きな自然数を1つ考えて，その数をAとする」
└4

「Aに1を加えて，その数を2倍して，Bとする」
$(4+1)\times2=10$

「Bに8を加えて，その数を2でわって，Cとする」
$(10+8)\div2=9$

「CからAをひいて，その数をDとする。」
$9-4=5$

答 5

数あてⅡ

花子さん
「次は，太郎さんの考える2けたの自然数をあててみせます。」
「2けたの自然数を1つ考えて，その数をEとしてください。」
「Eの十の位の数を5倍して，その数から2をひいて，Fとしてください。」
「Fを2倍して，その数にEの一の位の数を加えて，Gとしてください。」
「Gは，いくつになりましたか。」
太郎さん
「68になりました。」
花子さん
「はじめに考えた2けたの自然数Eは，72ですね。」
太郎さん
「正解です。なぜ分かったのですか。」
花子さん
「計算した答えGに4を加えると，必ず，はじめに考えた自然数Eになるのですぐに分かるのです。」

表 2

E	F	G

イ なぜ，計算した答えGに4を加えた数が，はじめに考えた自然数Eになるのでしょうか。はじめに考えた2けたの自然数Eの十の位の数を a，一の位の数を b として，そのわけを説明しなさい。

★

（例）
$\mathrm{E}=10a+b$ であり，
$\mathrm{G}=2\mathrm{F}+b$
$=2(5a-2)+b$
$=10a+b-4$
$=\mathrm{E}-4$
となるので，$\mathrm{E}=\mathrm{G}+4$ である。
よって，EはGに4を加えた数になる。